

# МЕХАНО-ЕЛЕКТРО-МАТЕМАТИЧНО МОДЕЛИРАНЕ НА ЕЛЕКТРОДИНАМИЧЕН ВИБРОИЗПИТАТЕЛЕН СТЕНД

## MECHANICAL-ELECTRO-MATHEMATICAL MODELING OF ELECTRODYNAMIC VIBROTESTING STAND

### МЕХАНИКО-ЭЛЕКТРО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО ИСПИТАТЕЛЬНОГО СТЕНДА

Доц. д-р инж. Начев Н., инж. Тонкова Г.  
Технически университет – София, България

**Abstract:** A mechanical-electro-mathematical modeling of an electrodynamic vibrotesting stand has been described in this work. Basic mathematical ratios have been drawn and the dynamics of an electrodynamic vibrostand have been examined as an electro-mechanical system. Possible solutions have been represented which are directly applicable for creating optimal modes of equivalent vibration tests of devices and apparatuses.

The stand is the main unit of the system for equivalent vibration tests of devices and apparatuses, which was developed at the laboratory "Vibrations And Noise in Machines" at Technical University – Sofia.

**KEYWORDS:** VIBRATIONS, VIBRATOR, EQUIVALENT LOAD, ELECTRODYNAMICAL VIBROSTAND, MAGNETIC ENERGY, OSCILLATING UNIT, APERIODIC UNIT

## 1. Увод

При еквивалентните вибрационни изпитвания основно приложение в качеството на изпитателни стендове, намират електромеханичните управляеми системи – *електродинамични вибратори* [2,4], създаващи необходимото механично движение. Наред с тях, с широко приложение са още и вибраторите, чието действие се основава на *електрохидравличния* принцип [7,8]. Електрохидравличните вибростендове са подходящи за провеждане на изпитвания при много ниски честоти и освен това с тях е възможно да се постигнат значителни амплитуди по преместване – до 30 см., както и да се реализират много големи силови натоварвания – над 50 Т. Електродинамичните стендове в много по-голяма степен удовлетворяват многобройните изисквания на виброизпитванията [11].

За да се решат задачите, отнасящи се до анализа на динамиката на изследваните обекти е необходимо да се осъществи математично описание на вибрационния стенд, изпитвания обект, както и на системата вибростенд-изпитван обект. Доколкото електродинамичния вибростенд по същество представлява електро-механична система, задачата за съставяне на диференциалните уравнения на динамиката на стенда се решава с прилагането на класическата теория – уравненията на Лагранж-Максуел [5]:

$$(1) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_k} = U_k, (k=1,2,3...n),$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, (j=1,2,3...m),$$

където лагранжианът на системата  $L$  е:

$$(2) L = T(q_j, \dot{q}_j) - \Pi(q_j) - W_m(q_j, i_k) - W_e(q_j, \dot{q}_k),$$

където с  $T$  и  $\Pi$  са означени кинетичната и потенциалната енергия, а  $W_m$  и  $W_e$  изразяват магнитната и електрическата енергия на системата. Наред с функцията на Лагранж се въвежда още и диссипативната функция  $\psi$  :

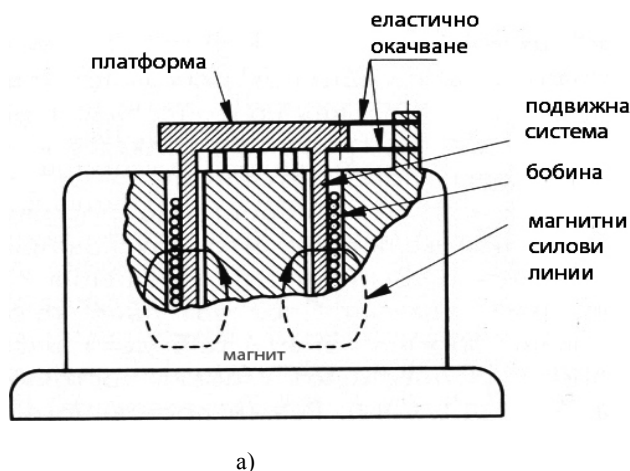
$$(3) \psi = \psi_e(i_k) + \psi_m(\dot{q}_j).$$

Уравнения (1) са система от  $n+m$  диференциални уравнения от втори ред, спрямо обобщените координати  $q_j$  и електрическите заряди  $\hat{q}_k$ .

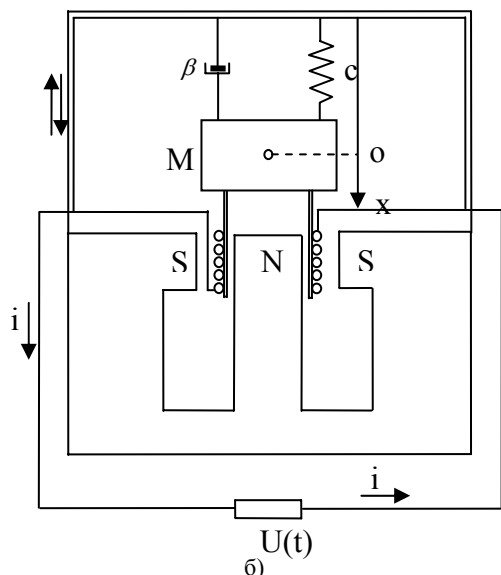
В уравненията на движението се включват още и пондеромоторните сили [5], произтичащи от зависимостта на магнитната и електрическата енергия от обобщените координати  $q_j$ . От обобщените координати зависят още и разпределението на магнитната проницаемост  $\mu$ , а така също и диелектричната проницаемост  $\epsilon$ , а това на свой ред влияе върху големината на пондеромоторните сили.

## 2. Резултати и дискусия

На фиг.1 е представена схема на електродинамичен вибростенд. Той се състои от постоянен магнит, обезпечаващ постоянно магнитно поле, бобина захранвана с променлив ток и подвижен елемент, който е окачен еластично. Максимално реализируемата сила се лимитира от интензитета на магнитното поле, диаметъра на бобината, броят на навивките й, а така също и от силата на захранващия ток.



а)



фиг. 1 Електродинамичен вибростенд  
 а) Конструкция на стенда;  
 б) Динамичен модел

Трептящата система на вибровъзбудителя би могла да се разглежда като идеална, ако бобината съвместно с платформата на стенда се движат като идеално твърдо тяло и всички точки, принадлежащи на системата се движат синфазно. Освен това, еластичното окачване трябва да обезпечи необходимото транслационно движение само в едно направление и накрая масата на изпитваният образец да не оказва никакво влияние върху движението на платформата. Естествено не е възможно да се създадат тези идеални условия, поради което се налага да се търсят в една или друга степен компромисни решения.

Изграждането на математичния модел на електродинамичния вибростенд, функциониращ в системата за вибрационни изпитвания, се основава на двата основни виброизпитателни режима:

– Имитация на изпитателни вибрационни натоварвания, които да бъдат еквивалентни на експлоатационните. При този режим изпитваният образец непосредствено натоварва стенда /платформата/, при което се осъществява твърда връзка между платформата на стенда и изпитвания обект. Контролът на вибрациите се осъществява посредством акселерометър, монтиран непосредствено върху платформата.

– Задаване на изпитателни режими, при които се постига определено вибрационно състояние на елементите на изпитвания обект. При това е необходимо да се отчете характера на връзките на изпитвания образец в експлоатационни условия, при което моделът на системата се усложнява допълнително. Това произтича вследствие отчитането на допълнителните еластични връзки между изпитвания образец и платформата на виброизпитателния стенд [2,9].

Ще разгледаме динамиката на електродинамичен вибростенд, както и възможни решения, с непосредствено приложение в практиката на виброизпитванията за създаване на оптимални режими за еквивалентни вибрационни изпитвания.

В зависимост от конкретните условия и задачи на изпитването, компоновката на виброизпитателната система, избрания режим на изпитването и т.н., поставената задача става твърде сложна както в теоретичен, така и в приложен план.

Съгласно схемата от фиг.1, с  $M$  означаваме масата на платформата на вибровъзбудителя,  $c$  – коефициент на еластичност на окачването, а  $\beta$  – коефициент на линейно съпротивление. Тялото върху което е поставена намотката на бобината също е подложено на известни деформации, но в

първо приближение неговата маса се привежда към масата на платформата.

Лагранжианът на системата, съгласно (2) е:

$$(4) L = T(q_j, \dot{q}_j) - \Pi(q_j) - W_m(q_j, i_k)$$

Кинетичната и потенциалната енергия се определят с познатите от теоретичната механика методи [3]. При съставянето на лагранжиана се отчита, че електрическата енергия на системата  $W_e(q_j, \hat{q}_k)$  е равна на нула, доколкото в електромеханична система липсват капацитети.

Ще изведем израза за магнитната енергия  $W_m(q_j, \hat{q}_k)$ .

За тази цел ще вземем под внимание, че векторът на магнитната индукция е перпендикулярен на проводника с дължина  $l$ , пресичащ магнитните силови линии.

Приемаме още, че въздушната междина  $\delta$  между полюсите на постоянния магнит е много малка в сравнение с останалите му геометрични размери. При това условие, което на практика е много добре изпълнено, можем да приемем, че магнитното поле е хомогенно и да пренебрегнем граничните ефекти. Магнитната проницаемост  $\mu$  също приемаме за постоянна.

Така за магнитната енергия ще бъде в сила изрза:

$$(5) W_m = \frac{1}{2\mu} S \delta B^2$$

На свой ред магнитният поток ще се определи от съотношението:

$$(6) \Phi = BS \omega(x),$$

където  $S$  е повърхнината, пронизвана от магнитния поток,  $B$  – магнитната индукция, а  $\omega(x)$  – броят на навивките на бобината, пронизвани от магнитния поток, като функция на обобщената координата  $x$ , при което имаме още

$$(7) \omega(x) = \frac{\omega_0}{h} x,$$

където  $\omega_0$  е общият брой на навивките, а  $h$  – височината на тялото на бобината. С  $\omega_0 / h$  е означен броя на навивките за единица дължина от бобината. Магнитният поток  $\Phi$ , ще се определи с формулата [1]:

$$(8) \Phi = Li,$$

където  $L$  е кофициентът на самоиндукция.

От (6), (7) и (8) определяме магнитната индукция  $B$ :

$$(9) B = \frac{Lhi}{S\omega_0 x}$$

Така от (5) и (9) намираме:

$$(10) W_m = \frac{L^2 h^2 \delta}{2\mu\omega_0 x^2} i^2$$

От последните два израза (9) и (10) определяме коефициента на самоиндукция  $L$

$$(11) L = \frac{\mu\omega_0^2 x^2}{h^2 \delta}$$

и магнитната енергия на системата:

$$(12) W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu\omega_0^2 x^2}{h^2 \delta} i^2$$

По такъв начин за лагранжиана на електромеханичната система, намираме:

$$(13) L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 - \frac{1}{2} cx^2 + \frac{1}{2} \frac{\mu\omega_0}{h^2 \delta} x^2 i^2$$

Електрическата диссипативна функция е:

$$(14) \psi_e(i_k) = \frac{1}{2} Ri^2$$

За уравненията на движението на електромеханичната система, като се пренебрегне динамичното влияние на изпитвания образец, намираме:

$$(15) \begin{cases} M \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + cx = \hat{\mu} \\ L \frac{di}{dt} + Ri + \hat{\mu} \frac{dx}{dt} = U(t) \end{cases}$$

където  $\hat{\mu}$  е електромеханичен коефициент на преобразуването, при което  $\hat{\mu} = lB$  [N/A],  $U(t)$  е функцията на външната електродвижеща сила, а  $R$  – активното съпротивление на проводника на бобината.

Приемаме за начални условия, при  $t = 0, x = 0, \dot{x} = 0, i = 0$ , За да определим структурата на преобразуване на сигнала, уравнения (15) ще представим в операторна форма:

$$(16) \begin{cases} Mp^2 x + \beta p x + cx = \hat{\mu} i(p) \\ L p i(p) + R i(p) + \hat{\mu} p x = U(p) \end{cases}$$

Уравнения (16) обединяваме в едно

$$(17) (Mp^2 + \beta p + c)(Lp + R) = \hat{\mu} U(p) - \hat{\mu}^2 p x$$

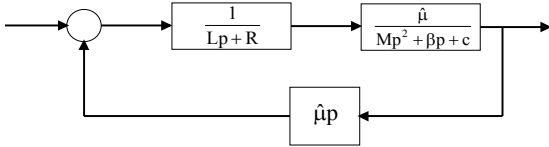
и определяме предавателната функция на системата:

$$(18) K(p) = \frac{K_a(p)K_k(p)}{1 + K_a(p)K_k(p)K_{os}(p)},$$

където  $K_a(p) = \frac{1}{Lp + R}$  е предавателната функция на аperiодичното звено,  $K_k(p) = \frac{\hat{\mu}}{Mp^2 + \beta p + c}$  - предавателната

функция на колебателното звено, а  $K_{os}(p) = \hat{\mu} p$  - предавателната функция на звеното на обратната връзка.

Така, електродинамичния стенд при изследвания изпитателен режим може да се представи като звено от трети ред, състоящо се от аperiодично и колебателно звено, обхванати от отрицателна обратна връзка, съгласно фиг. 2.



фиг. 2 Структурна схема на електродинамичен вибростенд

За да изследваме влиянието на звеното на обратната връзка върху честотната характеристика на стенда, ще се възползваме от представянето

$$(19) K_a(p)K_k(p) = A_1(\omega) + jB_1(\omega),$$

$$K_{os}(p) = A_2(\omega) + jB_2(\omega),$$

където  $A_1(\omega)$  и  $A_2(\omega)$  са реалните части на предавателните функции, а  $B_1(\omega)$  и  $B_2(\omega)$  - техните имагинерни части.

Аналогично за предавателната функция  $K(p)$  ще имаме:

$$(20) K(p) = Q(\omega) + jR(\omega),$$

където

$$(21) Q(\omega) = \frac{A_1(\omega) + A_1^2(\omega)A_2(\omega) + A_2(\omega)B_1^2(\omega)}{[1 + A_1(\omega)A_2(\omega) - B_1(\omega)B_2(\omega)]^2 + [A_1(\omega)B_2(\omega) + A_2(\omega)B_1(\omega)]^2},$$

$$(22) R(\omega) = \frac{B_1(\omega) - B_1^2(\omega)B_2^2(\omega) - A_1^2(\omega)B_2(\omega)}{[1 + A_1(\omega)A_2(\omega) - B_1(\omega)B_2(\omega)]^2 + [A_1(\omega)B_2(\omega) + A_2(\omega)B_1(\omega)]^2}$$

Необходимо е още да определим параметрите на електродинамичния стенд, съответно за електрическата и механичната подсистема:

- *Електрическа подсистема:*

За честотния предавателен коефициент на подвижната бобина имаме  $K_a(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_\sigma}$ , където  $\tau_\sigma$  е времеконстантата на звеното и  $\tau_\sigma = L/R$ , а  $\omega$  е кръговата честота;

Като вземем под внимание, че  $A_a(\omega) = \frac{1}{1 + \tau_\sigma^2\omega^2}$  е реалната част на  $K_a(j\omega)$ , а  $B_a(\omega) = -\frac{1}{1 + \tau_\sigma^2\omega^2}$  е неговата имагинерна част, то АЧХ и ФЧХ на звеното ще се определят с изразите:

$$(23) K_a(\omega) = |K_a(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_\sigma^2\omega^2}} \text{ и}$$

$$\varphi_a = \arg[K_a(j\omega)] = -\arctg(\omega\tau_\sigma).$$

- *Механична подсистема:*

Честотният предавателен коефициент на механичното колебателно звено е:

$$(24) K_k(j\omega) = \frac{h_k}{1 - \tau_M^2\omega^2 + 2j\eta\tau_M\omega},$$

където  $h_k = \hat{\mu}/M$ ,  $\tau_M = 1/\omega_0$ ,  $\omega_0 = \sqrt{c/M}$  и  $\eta = \beta/2M\omega_0$ .

Съответно за АЧХ и ФЧХ на колебателното звено намираме:

$$(25) K_k(\omega) = |K_k(j\omega)| = \frac{h_k}{\sqrt{(1 - \tau_M^2\omega^2)^2 + (2\eta\tau_M\omega)^2}} \text{ и}$$

$$(26) \varphi_k(\omega) = \arg[K_k(j\omega)] = -\frac{2h_k\eta\tau_M\omega}{(1 - \tau_M^2\omega^2)^2 + (2\eta\tau_M\omega)^2}.$$

- *За звеното на обратната връзка:*

На основание на израза за честотния предавателен коефициент на това звено  $K_{os}(j\omega) = \hat{\mu}(j\omega)$  и като вземем под внимание, че  $A_2(\omega) = 0$  и  $B_2(\omega) = \hat{\mu}\omega$ , получаваме АЧХ и ФЧХ на звеното:

$$(27) K_{os}(\omega) = |K_{os}(j\omega)| = \hat{\mu}\omega, \text{ и}$$

$$\varphi_{os}(\omega) = \arg[K_{os}(j\omega)] = \frac{\pi}{2}.$$

Изхождайки от (18) за честотния предавателен коефициент на електродинамичния вибратор получаваме

$$(28) K(j\omega) = \frac{K_a(j\omega)K_k(j\omega)}{1 + K_a(j\omega)K_k(j\omega)K_{os}(j\omega)},$$

който ще приведем в показателна форма на основание на представянето

$$K(j\omega) = |K(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

където  $K(\omega) = |K(j\omega)|$  е АЧХ, а  $\varphi(\omega)$  – ФЧХ на системата.

Следователно:

$$(29) K(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \frac{K_a(\omega)e^{j\varphi_a(\omega)}K_k(\omega)e^{j\varphi_k(\omega)}}{1 + K_a(\omega)K_k(\omega)K_{os}(\omega)e^{j[\varphi_a(\omega)+\varphi_k(\omega)+\varphi_{os}(\omega)]}}.$$

Изразът (29) за честотния предавателен коефициент ще преобразуваме в тригонометрична форма:

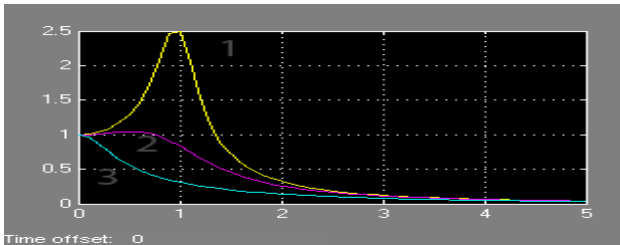
$$(30) K^{-1}(\omega)[\cos\varphi(\omega) - j\sin\varphi(\omega)] = K_{os}(\omega)[\cos\varphi_{os}(\omega) + j\sin\varphi_{os}(\omega)] + [K_a(\omega)K_k(\omega)]^{-1}\{\cos[\varphi_a(\omega) + \varphi_k(\omega)] - j\sin[\varphi_a(\omega) + \varphi_k(\omega)]\}$$

При извеждането на (30) са използвани формулите на Ойлер:

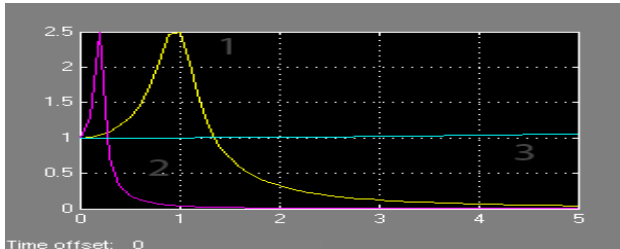
$$\cos t = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} \text{ и } \sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}.$$

След приравняване на реалните и имагинерните части на съотношението (30), достигаем до система от две уравнения:





фиг. 6 Коефициенти на динамичност за различни стойности на демпфирането



фиг. 7 Коефициенти на динамичност за различни собствени честоти на вибростенда

Действието на системата е следното: Сигналят от акселерометъра измерващ вибрациите, непосредствено на платформата на стенда, се интегрира и след необходимото усилване по ток и напрежение, отново постъпва на входа на вибростенда. Напрежението на бобината, под действието на този сигнал, в зависимост от неговата полярност ще бъде във фаза или в противофаза с члена  $\beta \frac{dx}{dt}$ , т.е.

$$(36) M \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + cx - \tilde{u}i = \pm \beta_1 \frac{dx}{dt}$$

Добавянето на члена  $\pm \beta_1 \frac{dx}{dt}$  е еквивалентно на намаляване

или увеличаване на демпфирането в системата. По този начин се постига притъпяване на резонанския връх на АЧХ на стенда и следователно изравняване на характеристиката на

вибростенда. На фиг. 6 са представени три АЧХ /коефициенти на динамичност/ за три различни стойности на относителния коефициент на демпфирането  $\eta$ . Характеристиката «1» съответства на действителната АЧХ на стенда, т.е. без внасяне на корекции, при  $\eta_1 = 0.2$ . Следващите две характеристики «2» и «3» съответстват на завишено демпфиране на подвижната система на стенда, чрез въведената електромеханична обратна връзка, при което се реализират  $\eta_2 = 0.7$  и  $\eta_3 = 1.7$ . Наблюдавано беше устойчиво възпроизвеждане на изпитателни вибрации в сравнително широк обхват на изменение на относителното демпфиране  $\eta = 0.04 \div 2$ .

Аналогично може да бъде постигнато еквивалентно увеличаване или намаляване на масата  $M$  на платформата на стенда. В този случай сигнала от акселерометъра, пропорционален на ускорението, след съответното усилване, отново постъпва на входа на електродинамичния вибратор. В зависимост от това дали е във фаза или в противофаза с члена

$$M \frac{d^2x}{dt^2},$$

се увеличава или намалява - еквивалентно масата на

трептящата система, т.е. изменя се собствената честота на трептящата система. Това може да се осъществи и с въздействие върху члена  $cx$ , като в този случай се променя коефициента на еластичност на трептящата система. Сега е необходимо двукратно интегриране на сигнала /фиг. 5/. Резонансните криви, представени на фиг. 7 представят този процес. Кривата «1» изобразява «естествената» АЧХ на експерименталния вибростенд. Останалите две криви «2» и «3» илюстрират намаляване и повишаване на собствените честоти /резонанския връх на АЧХ - «3» е извън графиката/.

Що се отнася до възможностите за промяна на собствената честота е необходимо обаче да се има в предвид, че процесът е подчинен на различни ограничения, свързани с устойчивостта на системата. Освен това, за управлението на стенда в този случай е необходима и значително по-голяма мощност на управляващото въздействие.



фиг. 8 Виброизпитателна система за еквивалентни изпитвания на уреди и апарати

### 3. Заключение

Извършеното в работата механо-електро-математично моделиране на електродинамичен вибростенд е част от дейността по създаването на система за еквивалентни вибрационни изпитвания на уреди и апарати. Системата, чиито общ вид е показан на фиг. 8 е в процес на разработка в лаборатория “Вибрации и шум в машините”, катедра “Механика” при Технически университет – София.

В тази насока се провежда изследователска работа /теоретична и експериментална/ за имитация на експлоатационни вибрации в лабораторни условия, за еквивалентни изпитвания на уреди и апарати от областта на електрониката и фината механика. Основното изискване е виброизпитателната система да генерира и реализира различни изпитателни режими с определени виброхарактеристики, в зависимост от целите и потребностите на конкретното изпитване. Независимо от използвания метод за имитация на експлоатационни вибрации, електродинамичния вибростенд се явява основно звено във виброизпитателния комплекс, което поставя изисквания за развитието на методите и средствата за неговото управление.

**“Научните изследвания, резултатите от които са представени в настоящата публикация, са финансирани от Вътрешния конкурс на ТУ-София- 2009 г.”.**

### 4. Литература

1. Алтабеков, Г. Теоретические основы электротехники. Москва, “Энергия”, 1970.
2. Божко, А. Воспроизведение вибрации. Киев, “Наукова думка”, 1975.
3. Гробов, А. Теория колебаний механических систем. Киев, “Вища школа”, 1982.
4. Йориш, Ю. Виброметрия. Москва, “Машгиз”, 1963.
5. Мартыненко, Ю. Аналитическая динамика электромеханических систем. Москва, “МЭИ”, 1984.
6. Начев, Н. Относно приложението на електродинамичните измерителни преобразуватели и съществуващи възможности за подобряване на метрологичните им характеристики. “Механика на машините”, кн.3, Варна, 2006.
7. Ленк, А. Механические испытания приборов и аппаратов. Москва, “Мир”, 1979.
8. Брех, Е. Измерения механических колебаний и ударов. Дания, фирма “Брюль е Кьер”, 1982.
9. Clarence, W. Vibration Monitoring, Testing and Instrumentation. London, “CRC”, 2007.
10. Daniel, J. Engineering Vibration. “Prentice Hall”, 2007.
11. Kenneth, G. Vibration Testing. Theory and Practice. London, “Wiley”, 2008.