РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧА ЗА НАЗНАЧЕНИЯТА С MS EXCEL SOLVER

SOLVING THE ASSIGNMENT PROBLEM USING MS EXCEL SOLVER

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ ЧЕРЕЗ MS EXCEL SOLVER

assist. prof. dr. eng. Dimitrov S.
Faculty of Transport Management, Higher School of Transport "Todor Kableshkov", Sofia, Bulgaria

Abstract: *This paper presents an example for MS Excel Solver application in solving assignment problem defined as linear programming task. To achieve optimal solution for the task an objective function, constraints and network model have been described and used.*

KEYWORDS: ASSIGNMENT PROBLEM, OPTIMAL SOLUTION, OPTIMIZATION, LINEAR PROGRAMMING, NETWORK, SOLVER

1. Увод.

В хода на провежданите научни изследвания учени и изследователи постоянно се сблъскват с проблеми от различно естество за разрешаването на които е необходимо вземане на адекватни мерки и търсене на оптимални решения. Наличието на сложни взаимовръзки между възникващите събития, които съпътстват протичащите процеси, изисква при построяване на математични модели да се изберат подходящи управляващи параметри и вземат в предвид съществуващите ограничения. С оглед на това при извършване на математично описание на дефинираните задачи е необходимо навлизане в детайли, което от една страна спомага за повишаване на точността на получаваните от моделите резултати, а от друга - в известна степен усложнява построените модели. Сложността на математичните модели и големия брой наложени ограничения пораждат нуждата от приложение на използваните в областта на изследването на операции оптимизационни техники. Неудобството при решаването на големи по размерност оптимизационни задачи се изразява предимно в изразходването на значително изчислително време.

2. Предпоставки и начини за разрешаване на проблема.

Решаването на дефинираните оптимизационни задачи с компютри чрез ползване на софтуер е не само препоръчително, а в някои случаи поради липса на време и наложително.

Съществуващите оптимизационни техники [1,2,3] намират приложение и при решаване на задачи в транспортните изследвания. За усъвършенстване на транспортните процеси, например може да се използва т. нар. транспортен модел [3].

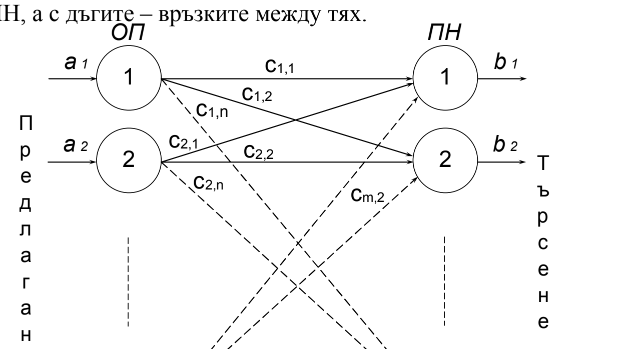
Транспортните модели са специален клас задачи на линейното програмиране [1], които описват преместването на товари от пунктовете на отправяне (изходни пунктове) до пунктовете на назначение (складове, магазини и др.) [3]. Транспортният модел може да се ползва още при решаване на задачи, свързани с управление на запасите, управление на движението на капиталите, съставяне на разписания, назначение на персонала и др. Пример за необходимостта от използване на транспортния модел в областта на транспорта е оптимизиране на разписанието на движение на превозните средства, оптимизиране на работния график на персонала, възлагане на служителите на конкретни задачи и др.

За оптимално разпределяне на служители по задачи би могъл да се използва транспортния модел на задачата за назначенията [1,3]. Задачата за назначенията (ЗН), която се състои във възлагането на m на брой работи на n на брой машини, може да се разглежда като частен случай на транспортната задача. Специфичното за нея е, че работите могат да се представят като отправни пунктове (ОП), а машините – като пунктове на назначение (ПН). Броят на отправните пунктове, наричани още производители е равен на броят на пунктовете на назначение, обозначавани още като потребители. Задачата се решава в случаите, когато във всеки един от всички n пункта на назначение е необходимо да се достави 1 единица продукт от един от всички m производители, т.е. когато от всеки източник към всеки потребител трябва да се изпрати само една единица продукт. Тогава предлагането в ОП е $a_i = 1$ за $i = 1,\dots,m$, а търсенето в ПН – $b_j = 1$, за $j = 1,\dots,n$. Ако броят на отправните пунктове се различава от броят на пунктовете на назначение, т.е. ако $m<n$ или $m>n$, съществуващият дисбаланс се преодолява, чрез въвеждане на т.нар. фиктивни работи или машини. В общия случай се приема, че $m = n$. При това за изпълнението на работа i на машина j се извършват разходи $C_{i,j}$. Ако са дадени разходите $C_{i,j}$ за "транспортиране" на единица продукт от всеки ОП към всеки ПН, задачата се свежда до намиране на това разпределение на работите между машините, при което сумарните разходи имат минимална стойност.

Най-известният метод за решаване на задачата за назначенията е унгарският метод, подробно разгледан в [1].

Понастоящем, използването на методи като унгарския, спадащи към групата на ръчните изчислителни алгоритми за решаване на задачи от този вид, не е единствената алтернатива. Задачи като транспортната задача и задачата за назначенията могат да се дефинират като задачи на линейното програмиране и решават с помощта на създадени за целта компютърни приложения [4] и компютърни програми.

Графично, моделът на задачата за назначенията може да се представи във вид на графова структура (мрежа), представляваща множество от върхове и дъги, които ги свързват (фиг. 1). С върховете в мрежата се обозначават ОП и ПН, а с дъгите – връзките между тях.



Фиг. 1. Общ вид на мрежовия модел на задачата за назначенията

Математическото описание на задачата се извършва чрез дефиниране на целева функция и ограничения, както следва:

Целева функция:

$$J = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{i,j} \cdot X_{i,j} \to \min \qquad (1),$$

където:

$X_{i,j}$ – търсеното количество продукция, "транспортирано" от $i^{-ти}$ ОП до $j^{-ти}$ ПН.

Ограничения:

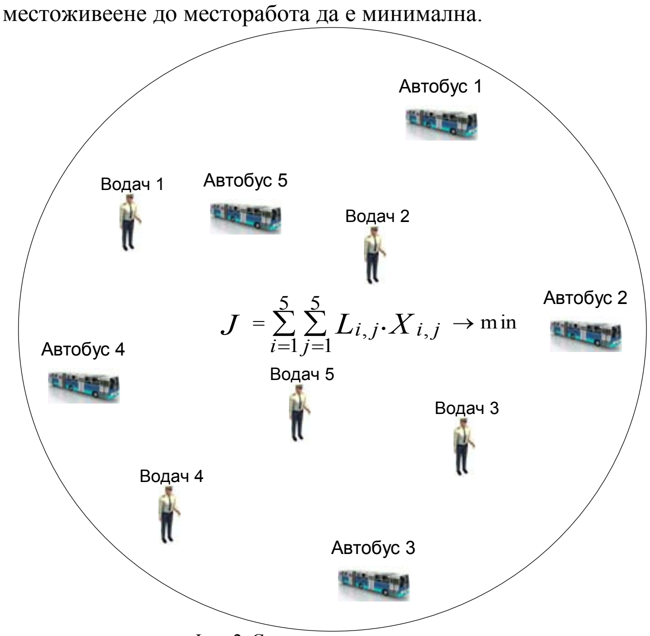
$$\sum_{j=1}^{n} X_{i,j} = 1 \quad за \quad i = 1,\dots,m \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{i,j} = 1 \quad j = 1,\dots,n \qquad (3)$$

3. Решение на проучения проблем.

Решение на задачата за назначенията, чрез използване на Microsoft® Excel [4], можем да опишем със следния пример.

В автотранспортно предприятие на длъжност „водач на автобус” са назначени *5* на брой служители. На територията на населеното място (фиг. 2) предприятието разполага с *5* на брой гаражи, в които са паркирани превозните средства на масовия градски транспорт, които в разглеждания случай са автобуси. Всеки от *5*-те нови служители живее в район на града, различен от тези, в които живеят останалите служители. При условие, че разстоянията $L_{i,j}$ от районите на живеене на автобусните водачи до всеки от гаражите са предварително зададени (табл. 1), е необходимо към всеки гараж да се прикрепи по един водач на автобус. Прикрепването трябва да се извърши по такъв начин, че на всеки от водачите да е зачислен само по един автобус и всеки автобус да се управлява от един единствен водач, при което сумата от разстоянията на всички водачи от местоживеене до месторабота да е минимална.

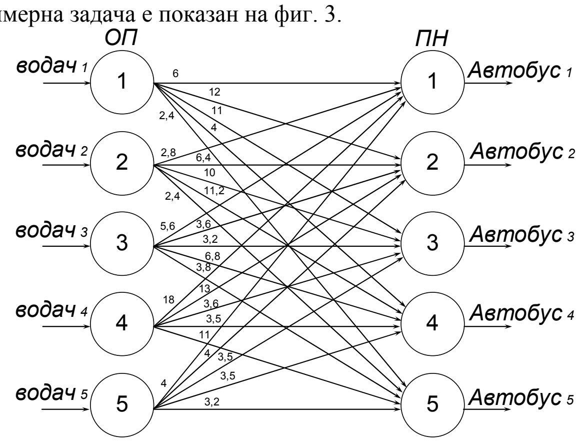


Фиг. 2. Схема на населеното място

Табл. 1. Разстояния между райони на живеене и автобусни гаражи

col	C	D	E	F	G	H	I	J	K
row			до / от	Автобус					
				1	2	3	4	5	
15		Водач	1	6,0	12,0	11,0	4,0	2,4	1
16			2	2,8	6,4	10,0	11,2	2,4	1
17			3	5,6	3,6	3,2	6,8	3,8	1
18			4	18,0	13,0	3,6	3,5	11,0	1
19			5	4,0	4,0	3,5	3,5	3,2	1
				1	1	1	1	1	

Построеният мрежови модел за конкретно решаваната примерна задача е показан на фиг. 3.



Фиг. 3. Мрежови модел на задачата за назначенията

Дефинираните целева функция и ограничения имат вида:

Целева функция:

$$J = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} L_{i,j} \cdot X_{i,j} \to \min \qquad (4)$$

Ограничения:

$$\sum_{j=1}^{5} X_{i,j} = 1 \quad за \quad i = 1,..,5 \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{5} X_{i,j} = 1 \quad за \quad j = 1,..,5 \qquad (6)$$

След разписване на формули (4), (5) и (6) получаваме:

$$\begin{aligned} J = {} & L_{1,1}.X_{1,1}+L_{1,2}.X_{1,2}+L_{1,3}.X_{1,3}+L_{1,4}.X_{1,4}+L_{1,5}.X_{1,5}+\\ & L_{2,1}.X_{2,1}+L_{2,2}.X_{2,2}+L_{2,3}.X_{2,3}+L_{2,4}.X_{2,4}+L_{2,5}.X_{2,5}+\\ & L_{3,1}.X_{3,1}+L_{3,2}.X_{3,2}+L_{3,3}.X_{3,3}+L_{3,4}.X_{3,4}+L_{3,5}.X_{3,5}+\\ & L_{4,1}.X_{4,1}+L_{4,2}.X_{4,2}+L_{4,3}.X_{4,3}+L_{4,4}.X_{4,4}+L_{4,5}.X_{4,5}+\\ & L_{5,1}.X_{5,1}+L_{5,2}.X_{5,2}+L_{5,3}.X_{5,3}+L_{5,4}.X_{5,4}+L_{5,5}.X_{5,5}=\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & 6{,}0.X_{1,1}+12{,}0.X_{1,2}+11{,}0.X_{1,3}+\ 4{,}0.X_{1,4}+\ 2{,}4.X_{1,5}+\\ & 2{,}8.X_{2,1}+\ 6{,}4.X_{2,2}+10{,}0.X_{2,3}+11{,}2.X_{2,4}+\ 2{,}4.X_{2,5}+\\ & 5{,}6.X_{3,1}+\ 3{,}6.X_{3,2}+\ 3{,}2.X_{3,3}+\ 6{,}8.X_{3,4}+\ 3{,}8.X_{3,5}+\\ & 18{,}0.X_{4,1}+13{,}0.X_{4,2}+\ 3{,}6.X_{4,3}+\ 3{,}5.X_{4,4}+11{,}0.X_{4,5}+\\ & 4{,}0.X_{5,1}+\ 4{,}0.X_{5,2}+\ 3{,}5.X_{5,3}+\ 3{,}5.X_{5,4}+\ 3{,}2.X_{5,5} \to min\end{aligned}$$

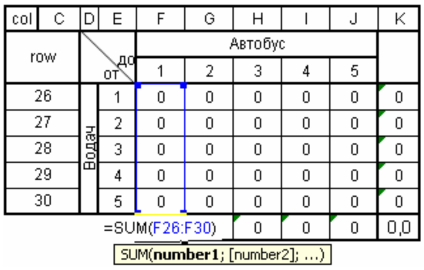
$$\begin{aligned} & X_{1,1}+X_{1,2}+X_{1,3}+X_{1,4}+X_{1,5}=1\\ & X_{2,1}+X_{2,2}+X_{2,3}+X_{2,4}+X_{2,5}=1\\ & X_{3,1}+X_{3,2}+X_{3,3}+X_{3,4}+X_{3,5}=1\\ & X_{4,1}+X_{4,2}+X_{4,3}+X_{4,4}+X_{4,5}=1\\ & X_{5,1}+X_{5,2}+X_{5,3}+X_{5,4}+X_{5,5}=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & X_{1,1}+X_{2,1}+X_{3,1}+X_{4,1}+X_{5,1}=1\\ & X_{1,2}+X_{2,2}+X_{3,2}+X_{4,2}+X_{5,2}=1\\ & X_{1,3}+X_{2,3}+X_{3,3}+X_{4,3}+X_{5,3}=1\\ & X_{1,4}+X_{2,4}+X_{3,4}+X_{4,4}+X_{5,4}=1\\ & X_{1,5}+X_{2,5}+X_{3,5}+X_{4,5}+X_{5,5}=1\end{aligned}$$

Решаването на задачата за назначенията посредством предложената в офис приложението MS Excel функционалност “Solver”, достъпна от меню “Tools”, се извършва чрез спазване на следната последователност от действия:

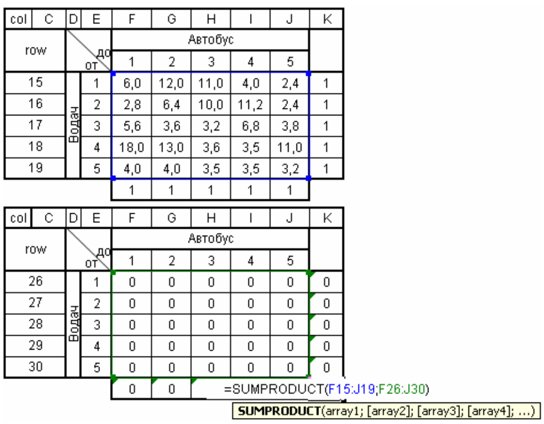
Попълва се табл. 2, имаща структурата като тази на таблицата с разстоянията (табл. 1). За изчисляване на сумите по редове и колони в таблицата се ползва функцията “SUM”, а за изчисляване на стойността на целевата функция *J* – функцията “SUMPRODUCT” (фиг. 4):

Табл. 2



col	C	D	E	F	G	H	I	J	K
row			до / от	Автобус					
				1	2	3	4	5	
26		Водач	1	0	0	0	0	0	0
27			2	0	0	0	0	0	0
28			3	0	0	0	0	0	0
29			4	0	0	0	0	0	0
30			5	0	0	0	0	0	0
				=SUM(F26:F30)	0	0	0	0	0,0

SUM(**number1**; [number2]; ...)



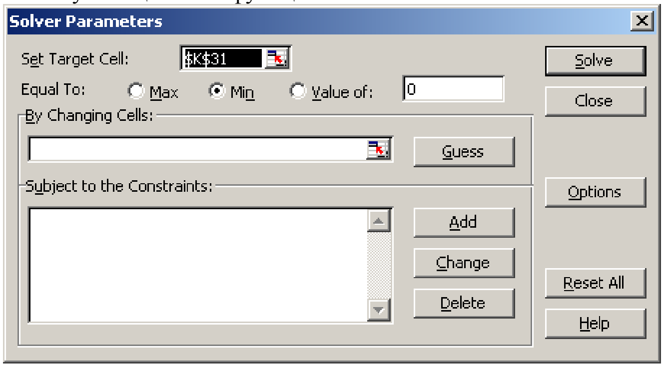
col	C	D	E	F	G	H	I	J	K
row			до / от	Автобус					
				1	2	3	4	5	
15		Водач	1	6,0	12,0	11,0	4,0	2,4	1
16			2	2,8	6,4	10,0	11,2	2,4	1
17			3	5,6	3,6	3,2	6,8	3,8	1
18			4	18,0	13,0	3,6	3,5	11,0	1
19			5	4,0	4,0	3,5	3,5	3,2	1
				1	1	1	1	1	

col	C	D	E	F	G	H	I	J	K
row			до / от	Автобус					
				1	2	3	4	5	
26		Водач	1	0	0	0	0	0	0
27			2	0	0	0	0	0	0
28			3	0	0	0	0	0	0
29			4	0	0	0	0	0	0
30			5	0	0	0	0	0	0
				0	0	=SUMPRODUCT(F15:J19;F26:J30)			

SUMPRODUCT(array1; [array2]; [array3]; [array4]; ...)

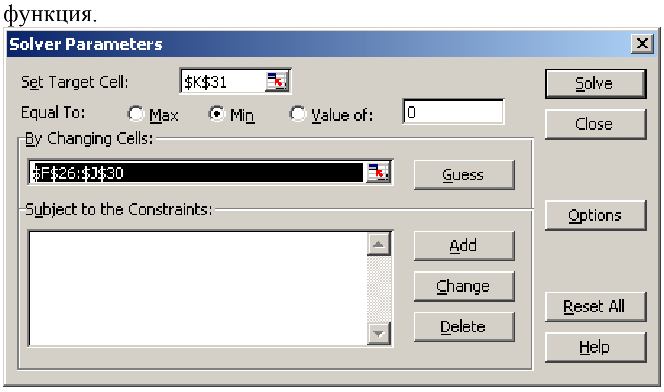
Фиг. 4. Функция, изчисляваща стойността в целевата клетка $K$31

От меню “Tools” се избира “Solver…” в резултат, на което се отваря прозореца „Solver Parameters” (Фиг. 5), в който се избира целева клетка $K$31, в която предварително е въведена формулата за изчисляване на стойността на целевата функция. Чрез избиране на радио бутон “Min” се указва, че се търси минимум на целевата функция.



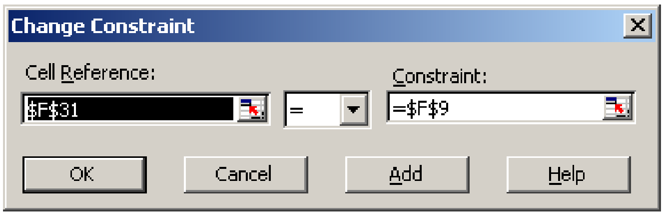
Фиг. 5. Прозорец “Solver параметри”

В текстовото поле под етикета “By Changing Cells:”(фиг. 6) се посочва посредством промяната на стойностите в кой обхват от клетки (табл. 2, обхват $F$26:$J$30) се минимизира целевата функция.

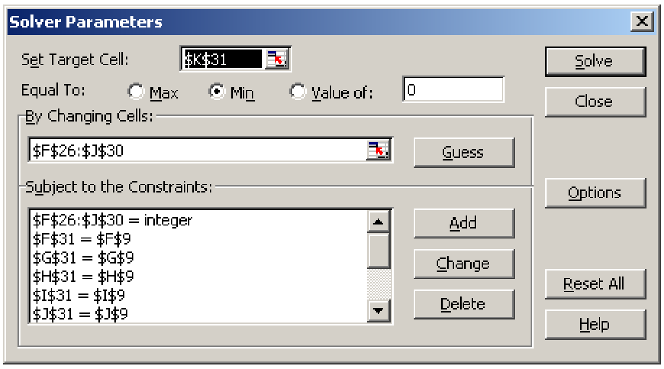


Фиг. 6. Обхват от клетки с променящи се стойности

С натискане на бутон “Add” последователно се добавят ограниченията в модела (фиг. 7 и фиг. 8).

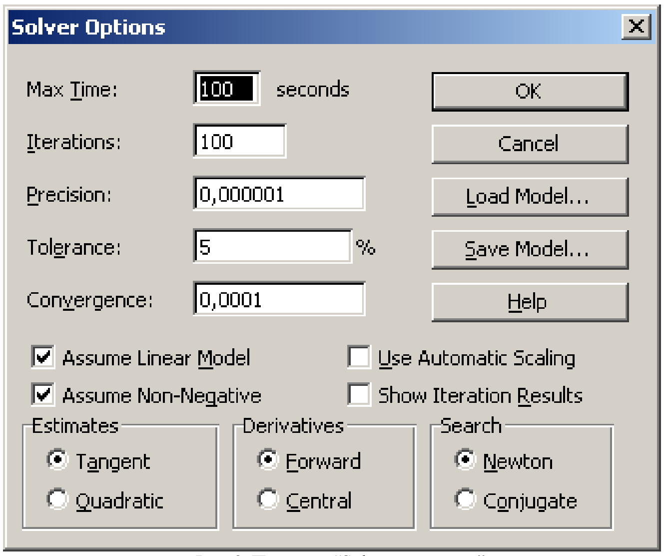


Фиг. 7. Ограничителни условия



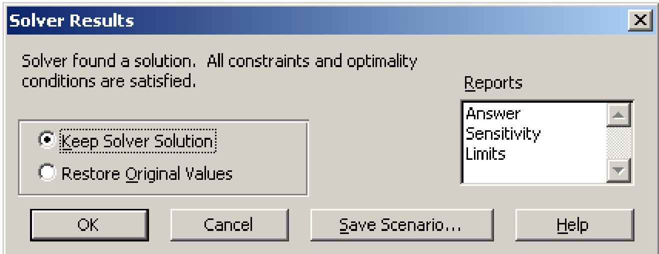
Фиг. 8. Прозорец “Solver параметри” с въведени ограничения

Следва натискане на бутона „Options”. Отваря се прозореца „Solver Options” (фиг. 9), в който вляво от етикета “Assume Linear Model” се поставя отметка, с което се обозначава, че модела е линеен, както се поставя отметка и срещу етикета “Assume Non-Negative”, за да се укаже, че търсеният минимум трябва да е неотрицателен. За връщане в предходния прозорец се натиска бутон “OK”. За извършване на изчисленията и намиране на оптимално решение се натиска бутон “Solve”.



Фиг. 9. Прозорец “Solver настройки”

След завършване на изчисленията, в потвърждение, че е намерено оптимално решение, удовлетворяващо зададените ограничения, “Solver” извежда подходящо съобщение (фиг. 10).



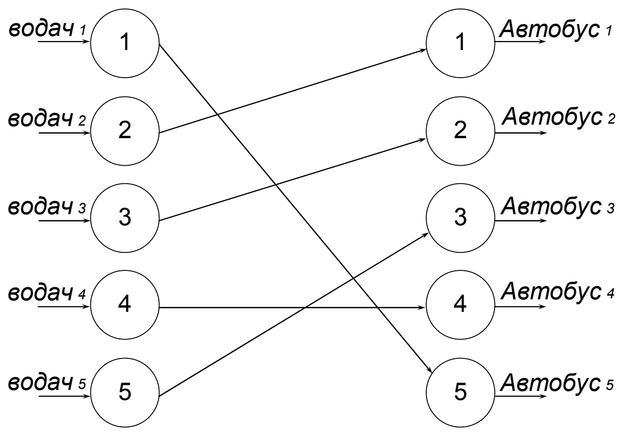
Фиг. 10. Прозорец “Solver резултати”

С натискане на бутон “OK” при положение, че е оставен избраният по подразбиране радио бутон “Keep Solver Solution”, се запазват резултатите за намереното оптимално решение.

Таблично и графично представяне на резултатите от решението на задачата за назначенията е извършено последователно в табл. 3 и на фиг. 11.

Табл. 3. Оптимално назначение

col	C	D	E	F	G	H	I	J	K
row		до / от		Автобус					
				1	2	3	4	5	
26		Водач	1	0	0	0	0	1	1
27			2	1	0	0	0	0	1
28			3	0	1	0	0	0	1
29			4	0	0	0	1	0	1
30			5	0	0	1	0	0	1
				1	1	1	1	1	15,8



Фиг. 11. Оптимално назначение

4. Резултати и дискусия.

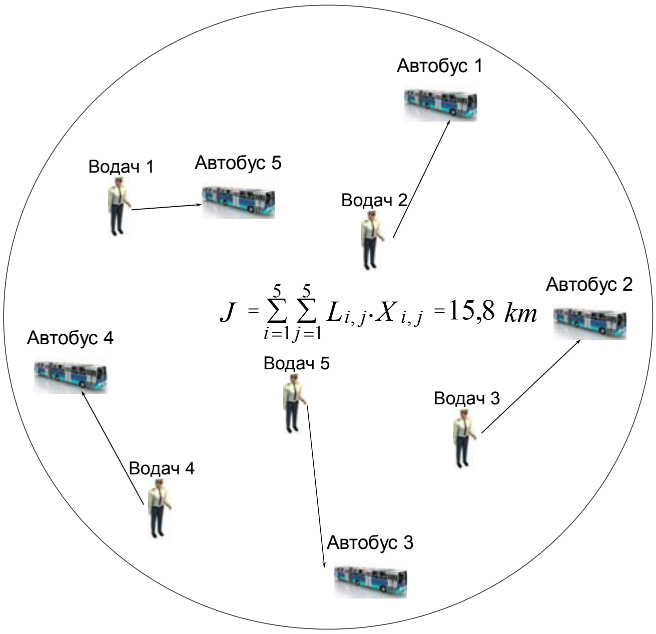
Получените от решението на задачата за назначенията резултати (табл. 3 и фиг. 11) показват, че:

1. Оптималното назначение на $5^{-мата}$ водачи към $5^{-те}$ автобуси, минимизиращо сумарното изминавано разстояние от местоживеене към месторабота е (1,5), (2,1), (3,2), (4,4) и (5,3), т.е.:

$X_{1,5} = X_{2,1} = X_{3,2} = X_{4,4} = X_{5,3} = 1$, като в същото време всички останали стойности за $X_{i,j}$ са равни на 0.

Съгласно полученото оптимално назначение (фиг. 12):

- водач 1 се прикрепва към автобус 5;
- водач 2 се прикрепва към автобус 1;
- водач 3 се прикрепва към автобус 2;
- водач 4 се прикрепва към автобус 4;
- водач 5 се прикрепва към автобус 3.



Фиг. 12. Схема "оптимално назначение"

2. След заместване във формула (4) само с ненулевите елементи, за сумарното минимално разстояние J (табл. 3, клетка K31), изминавано при придвижване на водачите на автобуси от вкъщи до работа, получаваме:

$J = L_{1,5}.X_{1,5}+L_{2,1}.X_{2,1}+L_{3,2}.X_{3,2}+L_{4,4}.X_{4,4}+L_{5,3}.X_{5,3}=$

$= 2,4.1+ 2,8.1 + 3,6.1 + 3,5.1 + 3,5.1 = 15,8$ *км*

5. Заключение.

На базата на извършеното описание и представеното решение на задачата за назначенията в средата на MS Excel, чрез ползване на възможностите на MS Excel Solver, могат да се направят следните заключения:

1. Предложеният подход за описание на разнообразни задачи и тяхното последващо решение, чрез ползване на MS Excel Solver, е лесно приложим;

2. Ползването на изчислителна техника и софтуерни приложения значително ускорява изчислителните процедури;

3. В зависимост от целите, задачата за назначенията би могла да се реши не само за минимизиране на сумарното разстояние от местоживеене към месторабота, а и от гледна точка на минимално сумарно време или минимални сумарни разходи за достигане от жилищни райони до автобусни гаражи;

4. Разгледаната функционалност "Solver", може да се използва, както за решаване на задачи от транспортен тип, така и за решаване на задачи и в други области.

6. Литература.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гатев, Г., "Изследване на операции – избор на решения при определеност", книга 1, издателство на ТУ – София, 2003г.

[2] Качаунов, Т. Т., "Моделиране и оптимизация на транспортните процеси", второ преработено издание, Печатница при ВТУ "Тодор Каблешков", София, 2005 г.

[3] Таха, Х. А., "Введение в исследование операций", 7-е издание.: Пер. с англ.– М.: Издательский дом „Вильямс", 2005г.

[4] Microsoft Excel 2003 Help, Microsoft Corporation