

# МОДЕЛИРАНЕ НА ДИНАМИЧНОТО ПОВЕДЕНИЕ НА МНОГОМАСОВИ КОНСТРУКЦИИ С ПОМОЩТА НА КРАЙНИ ЕЛЕМЕНТИ

## MODELLING DYNAMIC RESPONSE OF MULTIBODY STRUCTURES BY FINITE ELEMENTS

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МНОГОМАСОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Assoc. prof. dr. Iliev V., MEng. Angelova A.  
Faculty of Transport – Technical university of Sofia, Bulgaria  
E-mail: viliev@aero.tu-sofia.bg; E-mail: angelova@aero.tu-sofia.bg

**Abstract:** *The subject of the paper is modelling of rigid and flexible multibody structures by using finite elements. Only linear case is presented but directions for nonlinear case is discussed. A simple example of car modelled by traditional methods and by finite element methods is shown. Equations of motion are solved by several ordinary differential equation solvers. Comparison of results is shown and is discussed.*

**Keywords:** MULTIBODY DYNAMICS, FLEXIBLE STRUCTURES, FINITE ELEMENTS, EQUATIONS OF MOTION

### 1. Въведение

През последните години се засилва интересът към численото моделиране на динамичното поведение на механични конструкции. Класическият подход е разделянето на конструкцията на отделни компоненти със съсредоточени параметри (твърди тела, пружини, демпфери и др.) и аналитичното извеждане на уравненията за движение. Този процес е трудоемък, изисква висока квалификация и при него много лесно се допускат грешки, които трудно се откриват.

Методът на крайните елементи (МКЕ) навлиза все повече в практиката при анализа на еластични конструкции, включително и динамичното им поведение. При него елементите на конструкцията се разделят на голям брой крайни елементи, които сравнително точно описват еластичните и масови свойства. Но при това разделяне се получават твърде голям брой уравнения за движение, за чието решаване са необходими доста мощни компютри дори и при сравнително прости задачи. Освен това моделирането на механизми с МКЕ е затруднено.

Тези проблеми на двата подхода са засилили изследванията в опит да се обединят предимствата им и да се сведат до минимум недостатъците им [2,3,5,6,7]. МКЕ осигурява простота и систематичност при боравенето с отделните елементи на конструкцията. Големият брой степени на свобода се преодолява чрез използване на компонентен синтез [3,5,6,7].

В настоящата работа са разгледани някои особености при използването на МКЕ при моделиране на динамиката на механични конструкции. При това разглежданията са ограничени само до линейни задачи.

### 2. Основни зависимости

В МКЕ уравненията за равновесие (движение) при моделиране на динамичното поведение на една конструкция имат вида:

$$(1) \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t),$$

където  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{K}$  са съответно матриците на масите, демпфиране и коравина,  $\mathbf{F}(t)$  е вектор на възловите сили, а  $\ddot{\mathbf{u}}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  и  $\mathbf{u}$  са векторите съответно на ускоренията, скоростите и преместванията на възлите. Когато моделът е линеен, горните матрици са константни.

За извеждането на уравненията за движение е необходимо изходната конструкция да се раздели на компоненти (аналогични на крайните елементи) с известни матрици на масите, коравината и демпфирането. По-долу са дадени матриците за някои често срещани елементи (компоненти).

Матрицата на коравина за пружина с коравина  $k$  има следния вид:

$$(2) \quad \mathbf{K}_{el} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix},$$

В този си вид тя лесно може да се използва, когато е по някоя от трите оси. Когато е разположена в по-общо положение тябва да се използва стандартната за МКЕ процедура за преминаване от локални към глобални координати [1] с помощта на трансформационна матрица  $\mathbf{T}$ :

$$(3) \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{el} \mathbf{T}.$$

За демпфер със съпротивление пропорционално на скоростта и коефициент на демпфиране  $c$  локалната демпфираща матрица има вида:

$$(4) \quad \mathbf{C}_{el} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}.$$

За демпфер в общо положение матрицата се преобразува аналогично на формула (3).

Ако трябва да се отчете масата на пружина или демпфер с маса  $m$ , може да се използва матрица на масите от следния вид:

$$(5) \quad \mathbf{M}_{el} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2m & m \\ m & 2m \end{bmatrix}.$$

Матрицата на масите за тяло със съсредоточена маса  $m$  е диагонална матрица с  $m$  по главния диагонал. Размера на матрицата може да е 1x1, 2x2 или 3x3 в зависимост от броя на степените на свобода на възела, където се намира тялото.

Когато едно тяло има призматична форма и в него действат надлъжни и напречни сили, то може да се моделира като твърдо или като еластично. При твърдо тяло е необходимо да се въведе линейна зависимост между преместванията на възлите в тялото и да се отчетат масовите му характеристики (маси и инерционни моменти). Това не е стандартна процедура в МКЕ, но може да се реализира сравнително просто. Нейно предимство е, че може да се използва и за твърди тела не само с призматична форма.

Когато е желателно да се отчетат еластичните свойства на тялото, най-удобно е то да се моделира с един или няколко крайни елемента от тип греда.

За тела с по-големи размери е необходимо да се отчита разпределението на масата в тях. Когато тялото има издължена форма, могат да се използват един или няколко крайни елемента от тип греда. При това трябва да се има в предвид, че всеки краен елемент увеличава степените на свобода (съответно уравненията за движение) с 3 - 12, в зависимост от размерността на задачата и конфигурацията на конструкцията.

Матрица на коравина за равнинна греда с дължина  $l$ , инерционен момент  $I$  и модул на Юнг  $E$  има следния вид:

$$(6) \quad \mathbf{K}_{el} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ сим. & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ & & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix},$$

а матрица на масите:

$$(7) \quad \mathbf{M}_{el} = \begin{bmatrix} \frac{13\rho Al}{35} & \frac{11\rho Al^2}{210} & \frac{9\rho Al}{70} & -\frac{13\rho Al^2}{420} \\ & \frac{\rho Al^3}{105} & \frac{13\rho Al^2}{420} & -\frac{\rho Al^3}{140} \\ сим. & & \frac{13\rho Al}{35} & -\frac{11\rho Al^2}{210} \\ & & & \frac{\rho Al^3}{105} \end{bmatrix},$$

където  $\rho$  е плътността на материала, а  $A$  е площта на напречното сечение. За примерни задачи матриците могат да се намерят в литературата по крайни елементи [1].

Когато телата имат по сложна форма и конфигурация на възлите, най-удачно е да се използва компонентен синтез [3,5,6,7]. При него тялото се моделира с помощта на МКЕ с необходимата детайлност, след което излишните степени на свобода се изключват и остават само необходимите за динамичния анализ. По този метод могат да се получат и трите вида матрици - на масите, на коравина и на демпфиране.

### 3. Решаване на уравненията за движение

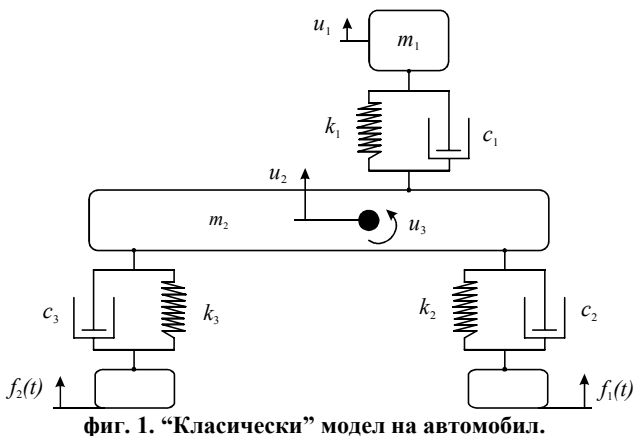
За решаване на уравненията за движение (1) в МКЕ са разработени различни методи [1], които са съобразени с особеностите на задачите с крайни елементи (особено с броя на степени на свобода) и дават много добри резултати. Тези методи обаче не винаги са подходящи за динамични задачи от по-общ вид, най-вече поради липсата на контрол на грешката и автоматичен избор на стъпката (в повечето реализации).

Затова в настоящата работа ще се изследва възможността за решаване на уравненията с по-общии методи. Тъй като в механичните конструкции влизат тела и елементи с различна твърдост, очаква се, че получените уравнения могат да имат увеличена твърдост в математичен смисъл. Затова при числените експерименти се разглеждат явни и неявни методи за интегриране на обикновени диференциални уравнения. За тази цел уравненията (1) се преобразуват във вида:

$$(8) \quad \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{F}(t) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{K}\mathbf{u}],$$

който е по-удобен за използване при общите методи за интегриране.

### 4. Пример

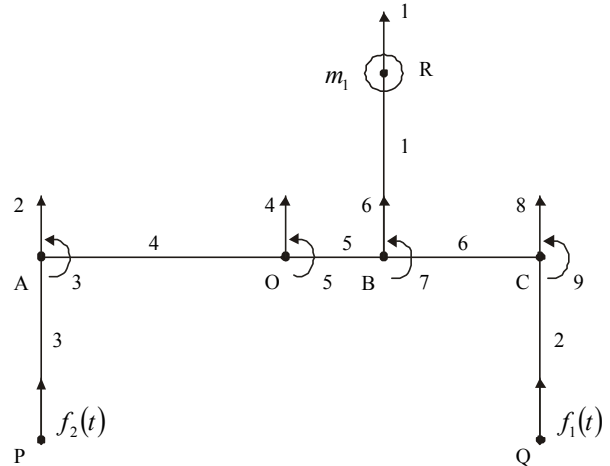


фиг. 1. "Класически" модел на автомобил.

За обект на изследване е избран автомобил, който е моделиран с помощта на 3 пружини, 3 демпфера и две маси - на рамата и на шофьора (фиг.1). Рамата има дължина  $L$ , центърът ѝ на тежест се намира на разстояние  $2/3L$  от левия край, а седалката на шофьора се намира на разстояние  $L/4$  от десния край. При движението си автомобилът среща неравност (дупка) със синусоидална форма, чието действие се моделира с функциите  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ .

При използване на класическият подход за моделиране се използват 3 степени на свобода, съответно три обикновени диференциални уравнения от втори ред.

При използване на МКЕ рамата е моделирана с 3 елемента от тип греда и общият брой степени на свобода е 9 (фиг. 2).



фиг. 2. Крайно-елементен модел на автомобил.

Глобалните матрици на коравина и на масите са показани съответно на фиг. 3 и фиг. 4, а глобалната демпфираща матрица има следния вид:

$$(9) \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 & 0 \\ & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ сим. & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & c_1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & c_2 \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

За сравнение са разгледани три случая: при първия случай се използва класическия модел с твърда рама и е означен като "твърд"; при втория и третия случай, означени съответно с "еластичен 1" и "еластичен 2" е използван крайно-елементен модел. Последните два модела се различават по коравината на използвания елемент греда - при третия случай тя е 10 пъти по-голяма отколкото във втория.

Таблица 1. Резултати за изчислителните ресурси.

| числен метод | модел       | брой стъпки | брой изч. на функцията | време, s |
|--------------|-------------|-------------|------------------------|----------|
| DERKF        | твърд       | 385         | 2470                   | 0.015    |
|              | еластичен 1 | 188589      | 1442199                | 4.750    |
|              | еластичен 2 | 2486919     | 17887824               | 58.97    |
| RADAU5       | твърд       | 193         | 972                    | 0.013    |
|              | еластичен 1 | 397         | 3200                   | 0.062    |
|              | еластичен 2 | 227         | 2016                   | 0.046    |

За решаване са използвани подпрограмите DERKF и RADAU5.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
 k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\
 k_3 + \frac{81EI}{2L^3} & \frac{27EI}{2L^2} & -\frac{81EI}{2L^3} & \frac{27EI}{2L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{6EI}{L} & -\frac{27EI}{2L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \frac{41553EI}{2L^3} & \frac{1701EI}{L} & -\frac{20736EI}{L^3} & \frac{864EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\
 сим. & & & \frac{54EI}{L} & -\frac{864EI}{L^2} & \frac{24EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & k_1 + \frac{21504EI}{L^3} & -\frac{768EI}{L^2} & -\frac{768EI}{L^3} & \frac{96EI}{L^2} & \\
 & & & & & \frac{64EI}{L} & -\frac{96EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & \\
 & & & & & & k_2 + \frac{768EI}{L^3} & -\frac{96EI}{L^2} & \\
 & & & & & & & \frac{16EI}{L} & \\
 & & & & & & & & \frac{L}{L}
 \end{bmatrix}$$

фиг. 3. Матрица на коравина.

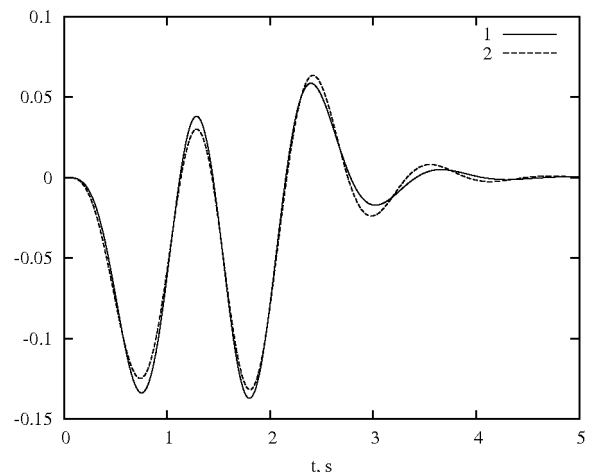
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
 m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{26\rho AL}{105} & \frac{22\rho AL^2}{945} & \frac{3\rho AL}{35} & -\frac{13\rho AL^2}{945} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{8\rho AL^3}{2835} & \frac{13\rho AL^2}{945} & -\frac{2\rho AL^3}{945} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \frac{39\rho AL}{140} & -\frac{11\rho AL^2}{480} & \frac{3\rho AL}{280} & -\frac{13\rho AL^2}{60480} & 0 & 0 & 0 \\
 сим. & & & \frac{19\rho AL^3}{6720} & \frac{13\rho AL^2}{60480} & -\frac{\rho AL^3}{241920} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{13\rho AL}{105} & \frac{11\rho AL^2}{3780} & \frac{9\rho AL}{280} & -\frac{13\rho AL^2}{6720} & \\
 & & & & & \frac{\rho AL^3}{6480} & \frac{13\rho AL^2}{6720} & -\frac{\rho AL^3}{8960} & \\
 & & & & & & \frac{13\rho AL}{140} & -\frac{11\rho AL^2}{3360} & \\
 & & & & & & & \frac{\rho AL^3}{6720} & \\
 & & & & & & & & \frac{6720}{6720}
 \end{bmatrix}$$

фиг. 4. Матрица на масите.

DERKF е подпрограма от пакета за интегриране на обикновени диференциални уравнения DDEPAC. Използва явен метод на Runge-Kutta-Fehlberg от пети ред.

RADAU5 е подпрограма за интегриране на твърди диференциални уравнения, както и диференциално-алгебрични уравнения, като използва неявен метод на Runge-Kutta от пети ред. Написана е от Hairer и Wanner [4]. Изчисленията са направени при относителна точност  $10^{-8}$ .

Движението на седалката на шофьора е показано на фиг. 5 (между втория и третия случай няма разлика, затова е показан само единия от тях). От нея се вижда, че няма съществена промяна в характера на движение.



фиг. 5. Преместване на масата  $m_1$  при твърд (1) и еластичен (2) модел.

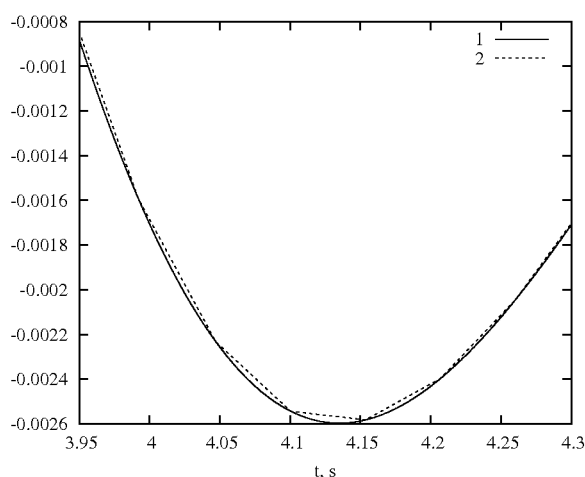
Резултатите по отношение на изчислителните ресурси са показани в таблица 1. От нея се вижда, че при решаване на класическата задача двата метода използват приблизително еднакво време, макар че RADAU5 използва 2 пъти по-малко стъпки и 2,5 пъти по-малко изчисления на функцията (дясната част на системата уравнения). Това може да се обясни с факта, че при RADAU5 на всяка стъпка се формира якобианът на дясната част на системата и се решава система линейни уравнения - типично за неявните методи.

При решаване на случаите с крайно-елементен модел се вижда, че времето за решаване и броя стъпки при DERKF се

увеличава драстично - повече от 70 пъти по отношение броя на използваните стъпки. Това се обяснява най-напред с факта, че броя на степените на свобода се е увеличил три пъти. По важният фактор обаче, е че системата диференциални уравнения е станала твърда [2,4] и за да работи устойчиво методът се нуждае от много малка стъпка.

Твърдостта на уравненията зависи от отношението на максималното и минималното собствено число на якобиана на системата диференциални уравнения. Третият случай от механична гледна точка би трябвало да се намира между първия (рама с безкрайна коравина) и втория (рама с 10 пъти по-малка коравина). Но при него по-коравата рама въвежда по-високи собствени честоти в якобиана (и в механичната конструкция) и това още повече повишава изискванията за устойчивост на решението и необходимите ресурси.

При RADAU5 изискванията за устойчивост се изпълняват значително по-лесно и затова стъпката на интегриране се определя най-вече от изискванията за постигане на зададената грешка. Това води до съвсем малко увеличение на изчислителните ресурси. Нещо повече, в третия случай, когато твърдостта на уравненията е по-голяма, необходимите ресурси са по-малко.



фиг. 6. Разлика в решението при явен (1) и неявен (2) метод за интегриране.

На фиг. 6 е показан фрагмент от резултатите за DERKF и RADAU5. Вижда се, че последният прави доста големи стъпки, но това не пречи крайният резултат да бъде същият.

Трябва да се има предвид, че това поведение на двата метода при класическата задача (с предимство за RADAU5) най-вероятно се дължи на това, че разглежданият пример е линеен. Ако той се разглежда в нелинейна постановка, много е възможно резултатите за RADAU5 да се влошат, както показват изследванията [2,4]. Това обаче не се отнася за крайно-елементния модел.

## 5. Заключение

Разгледан е крайно-елементен подход за извеждане на уравненията за движение на механична конструкция. Той позволява сравнително лесно да се получат уравненията за движение на относително сложни системи.

Разгледният пример показва някои особености на този подход при линейна постановка: възможност уравненията да се получат в аналитичен вид, несъществено увеличение на времето за решаване при използване на неявни методи, драстично увеличение на времето за решаване при използване на явни методи.

Необходимо е по-нататъшно изследване на този подход при решаване на нелинейни задачи.

## 6. Благодарности

Това изследване е извършено с финансовата подкрепа на Фонд "Научни изследвания" по договор ВУ-ТН-122/2005.

## 7. Литература

1. Bathe, K. J., Finite Element Procedures, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
2. Eich-Soellner E., Führer C., Numerical Methods in Multibody Dynamics, B. G. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1998.
3. Geradin, M., Cardona A., Flexible Multibody Dynamics – A Finite Element Approach, John Wiley & Sons, Chichester, 2001.
4. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-algebraic Problems. Springer-Verlag, second revised edition, 1996.
5. Iliiev, V., Component Mode Synthesis of Beam and Plate Finite Elements, Proc. 10th Jubilee National Congress on Theoretical and Applied Mechanics, 13-16 September 2005, Varna, pp. 198-201.
6. Shabana A., Dynamics of Multibody Systems, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
7. Илиев В., Използване на компонентен модален синтез в динамиката на многомасови системи с деформируеми тела, Механика на Машините, № 68, 2007, стр. 28-31.